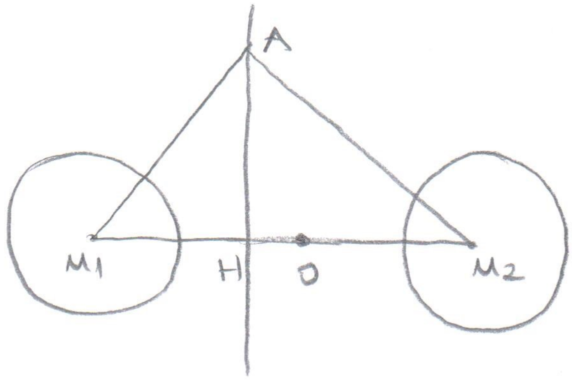
MAT 333 GEOMETRİ FİNAL SINAVI

CEVAP ANAHTARI

1. İki çemberin kuvvet ekseninin bir doğru belirttiğini gösteriniz.

Çözüm:



M_1 ve M_2 merkezli iki çembere aynı kuvvette bir A noktası alalım. A noktasının $[M_1M_2]$ üzerindeki dikme ayağı H olsun. $[M_1M_2]$ nin orta noktasına O diyelim.

$$|AM_1|^2 - r_1^2 = |AM_2|^2 - r_2^2 \quad \text{kuvvetten}$$

$$\Rightarrow |AM_2|^2 - |AM_1|^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$\overset{\triangle}{AM_2H}$ pisagordan $|AM_2|^2 = |AH|^2 + |HM_2|^2$ --- (1)

$\overset{\triangle}{AM_1H}$ " $|AM_1|^2 = |AH|^2 + |HM_1|^2$ --- (2)

(1) ve (2) taraf tarafa çıkarılırsa ve $|OM_1| = |OM_2|$ kullanılırsa

$$|AM_2|^2 - |AM_1|^2 = |HM_2|^2 - |HM_1|^2$$
$$= (|HO| + |OM_2|)^2 - (|M_1O| - |OH|)^2$$
$$= |HO|^2 + 2|HO||OM_2| + |OM_2|^2$$
$$- |M_1O|^2 + 2|M_1O||OH| - |OH|^2$$

$\Rightarrow \quad |OH| = \dfrac{r_2^2 - r_1^2}{2|M_1M_2|}$, burada $|OM_2| |OM_1| = |M_1M_2|$

$\Rightarrow |OH| = \text{sabit}$

$\Rightarrow H \in [M_1M_2]$ sabit nokta olup AH doğrudur

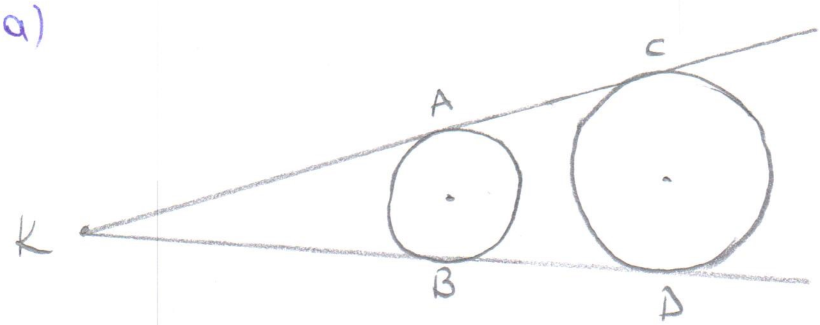
ve bu çemberin kuvvet eksenidir.

2. İki çemberin

a) Dış ortak teğet parçaları eşittir,

b) İç ortak teğet parçaları eşittir, gösteriniz.

ÇÖZÜM: a)



$|KC| = |KD| \quad \text{---} \ (1)$

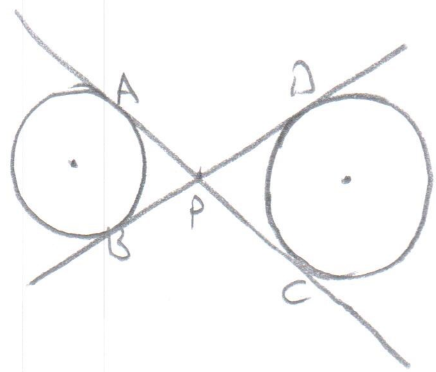
$|KA| = |KB| \quad \text{---} \ (2)$

(1) ve (2) taraf tarafa çıkarılırsa

$|KC| - |KA| = |KD| - |KB|$

$|AC| = |BD|$ elde edilir

b)



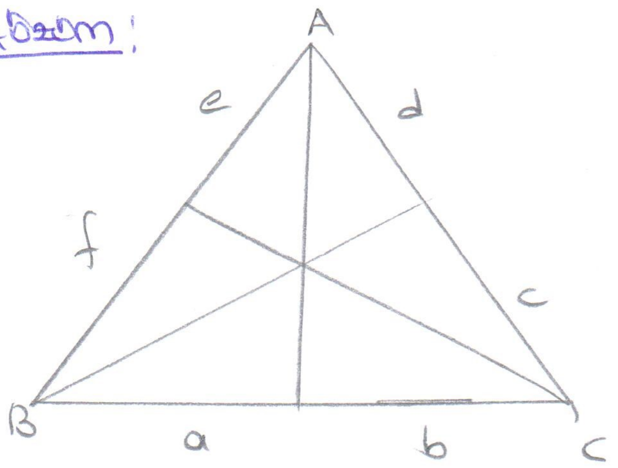
$$\begin{array}{rl} & |PA| = |PB| \\ + & |PC| = |PD| \\ \hline & |PA| + |PC| = |PB| + |PD| \end{array}$$

$|AC| = |BD|$

elde edilir.

3. Seva Teoremini ifade ve ispat ediniz.

Çözüm:



$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1$ dir.

$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{f}{e} \cdot \frac{x}{y} = 1$ Menelaus teo.den

$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y} = 1$ " "

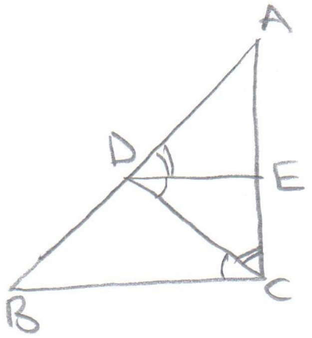
Taraf tarafa oranlanırsa

$\frac{b.f.d}{e.c.a} = 1 \Rightarrow \frac{e.c.a}{b.f.d} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1$

4. Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninde $|AB| > |AC| \Leftrightarrow m(\hat{C}) > m(\hat{B})$ dir.

Çözüm:

$\Rightarrow$) $|AB| > |AC|$ olduğunu kabul edelim



[AB] üzerinde $|AD| = |AC|$ olacak şekilde bir $D \in [AB]$ vardır.

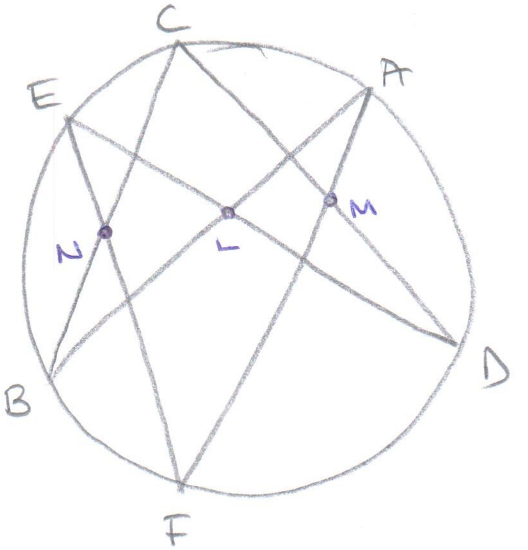
$[BC] \parallel [DE]$ olsun

$m(A\hat{C}B) > m(A\hat{C}D) = m(A\hat{D}C)$ (ikizkenar)

$m(A\hat{D}C) > m(A\hat{D}E) = m(\hat{B})$ (yöndeş açı)

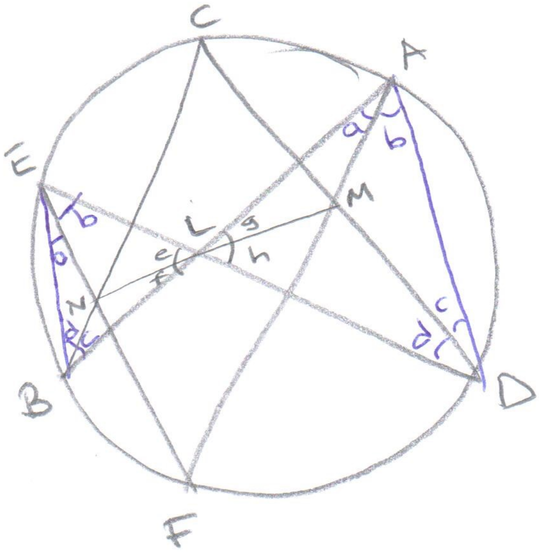
$\Leftrightarrow m(A\hat{C}B) = m(\hat{C}) > m(\hat{B})$

5. Pascal Teoremini ifade ve ispat ediniz.



N, L, M noktaları doğrudaştır.

İspat:



$m(E\hat{L}N) = m(\hat{M}LD)$

$e = h$

ters açı olduğunu göstermeliyiz.

$\overset{\triangle}{ELB}$ de trigonometrik ceva teo uygulanırsa

$$\sin a \cdot \sin e \cdot \sin c = \sin b \, \sin f \, \sin d \quad \text{--- (1)}$$

$\overset{\triangle}{ALD}$ de trig. ceva

$$\sin a \cdot \sin h \cdot \sin c = \sin b \cdot \sin d \cdot \sin g \quad \text{--- (2)}$$

(1) ve (2) oranlanırsa

$$\frac{\sin e}{\sin h} = \frac{\sin f}{\sin g}$$

$$\sin e \cdot \sin g = \sin h \cdot \sin f \quad \text{--- (3)}$$

Şekilden $e+f = g+h$ (ters açılar) --- (4)

$$\sin e \cdot \sin g = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{e-g}{2}\right) - \cos\left(\frac{e+g}{2}\right)\right)$$

$$\sin h \cdot \sin f = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{h-f}{2}\right) - \cos\left(\frac{h+f}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow e+f = g+h \quad \Rightarrow e-g = h-f$$

(3) den $\quad \cos\left(\frac{e+g}{2}\right) = \cos\left(\frac{h+f}{2}\right)$

$$\Rightarrow e+g = h+f \quad --- (5)$$

(4) ve (5) den $\quad e=h$ elde edilir

O halde N, L, M aynı doğru üzerindedir.